

Université du Québec à Montréal
École de Gestion
Département des sciences économiques

ECO7036
Econométrie

Professeur: Alain Guay
Session: hiver 2007

Examen Intra

1. Définissez les concepts suivants: (25 pts)

- (a) La puissance d'un test.
- (b) La statistique t .
- (c) Le coefficient de détermination (R^2).
- (d) La convergence en probabilité.
- (e) La borne de Cramer-Rao.

2. Supposons le modèle linéaire classique: (25 pts)

$$Y = X\beta + \epsilon$$

où X est une matrice $T \times N$, $E(\epsilon) = 0$ et $E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2 I$ où I est une matrice identité de dimension $N \times N$.

- (a) Dérivez l'estimateur de β obtenu en minimisant le critère des moindres carrés ordinaires.
- (b) Démontrez que cet estimateur est sans biais et dérivez sa matrice de variance-covariance.
- (c) Démontrez qu'en présence d'une constante dans la régression, l'estimateur des moindres carrés ordinaires de cette constante est l'estimateur linéaire sans biais à variance minimale.
- (d) Démontrez que l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β est convergent en probabilité.
- (e) Démontrez que l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β est asymptotiquement normal.

3. Supposons le modèle suivant: (25 pts)

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{I}_{\{t > T\pi\}} + \epsilon_t.$$

où $t = 1, \dots, T$, $T=100$, $\pi = .5$ et $\mathbb{I}_{\{t > T\pi\}}$ est une fonction indicatrice prenant la valeur 1 si $\{t > T\pi\}$ et 0 autrement. La matrice de variance-covariance de ϵ_t est $\sigma^2 I$.

- (a) Interprétez ce modèle en termes de changement structurel du ou des paramètres du modèle.
- (b) À l'aide du concept de projection partielle découlant du Théorème de Frisch-Waugh, montrez que les estimateurs des moindres carrés ordinaires de α_0 et α_1 sont donnés par:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{50} \sum_{t=1}^{50} y_t$$

et

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{50} \sum_{t=51}^{100} y_t - \frac{1}{50} \sum_{t=1}^{50} y_t.$$

- (c) Montrez que ces estimateurs sont sans biais.
- (d) Décrivez deux approches pour effectuer un test de changement structurel sur ce modèle en spécifiant explicitement l'hypothèse nulle.
- (e) Donnez les deux statistiques de tests correspondantes aux approches décrites en d).

4. Soit le modèle suivant: (25 pts)

$$Y = X\beta + \epsilon$$

où X est une matrice de dimension $N \times K$ de variables explicatives et ϵ suit une loi $N(0, \sigma^2 I)$. On s'intéresse à l'hypothèse nulle suivante: $R\beta = q$.

- (a) Dérivez l'estimateur du maximum de vraisemblance de β et σ^2 pour le modèle non contraint.
- (b) Dérivez maintenant l'estimateur du maximum de vraisemblance de β et σ^2 pour le modèle contraint.
- (c) Dérivez une expression exprimant l'estimateur contraint de β en fonction de l'estimateur non contraint de β .

- (d) Dériver la matrice de variance-covariance de l'estimateur contraint de β en fonction de la matrice de variance-covariance de l'estimateur non contraint de β .
- (e) Proposez une statistique de test de l'hypothèse nulle $R\beta = q$ et donnez la loi que suit cette statistique en petit échantillon et de façon asymptotique